الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — ثانوية: المجاهد المتوفي علال العيشاوي

الشعبة: علوم تجريبية — دورة : 2025

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3 ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمريـــن الأول : (4 نقاط)

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \le e^2$

2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \ln u_n - 2$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

ج) أكتب عبارة u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د) أكتب P_n بدلالة n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

التمريـــن الثاني : (4 نقاط)

✍ مؤسسة ناشئة بها 12 موظف منهم 7 رجال أحدهم اسمه أنس و 5 نساء احداهن هبة، نريد تكوين لجنة من 3 أعضاء تمثل عمال المصنع.

1) ماهو عدد الحالات الممكنة لاختيار 3 أعضاء من العمال

2) أحسب احتمال الحوادث التالية:

❖ A " اللجنة كلها رجال " ❖ B " اللجنة تضم رجلا وامرأتين " ❖ C " اللجنة تضم أنس و هبة "

3) نعرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد النساء في اللجنة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ج) أحسب $P(X > 1)$

4) نريد تعيين مدير للمؤسسة ونائب من العمال

أ) أحسب احتمال أن يكون المدير و نائبه من جنسين مختلفين.

ب) أحسب احتمال أن يكون أنس أحد العضوين.

التمريـــن الثالث : (5 نقاط)

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الاتية: $z^2 + 4z + 8 = 0$

II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = -2 + 2i$، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -z_B$

1) أكتب العدد z_A على الشكل الاسي ثم استنتج الشكل الاسي لكل من z_B و z_C

2) أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(z_A)^n$ حقيقي موجب

ب) بين أن العدد $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف

3) أكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

4) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $arg\left(\frac{z+2-2i}{z+2+2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$

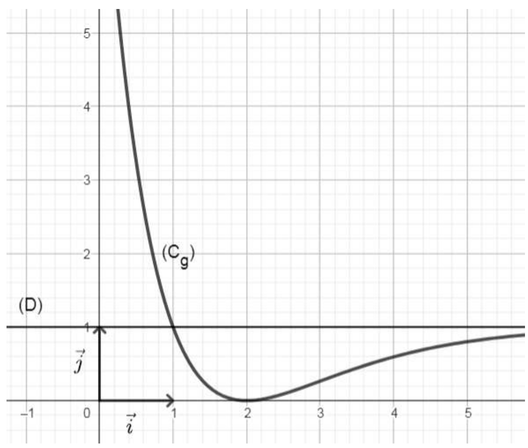
أ) بين أن النقطة O تنتمي إلى (Γ)

ب) عين ثم أنشئ (Γ)

التمريـــن الرابع : (7 نقاط)

I) (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x) = c + (a + bx)e^{-x+2}$.



◄ بقراءة بيانية :

1) عين $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ثم إستنتج أن $c = 1$.

2) عين $g(2)$ و $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ ثم إستنتج أن $a = 1$ و $b = -1$.

3) إستنتج من أجل كل عدد حقيقي x: إشارة $g(x)$.

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أُحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بين أن f دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

ب- إستنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3) أُحسب : $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

4) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$

5) أ- بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
ب- بيّن أنّ $I(2;3)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f).
ج - بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α، حيث : $0 < \alpha < 0,2$
د - أحسب $f(-\frac{1}{2})$ ثمّ أنشئ كلاً من (T)، (Δ) و المنحني (C_f).

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x + e^{x-2}(-1-m) = 0$

7) أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم عند 1
ب)أحسب بالسنتيمتر مربع A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات:
$y = x - 1$, $x = 1$ و $x = 2$

انتهى الموضوع الأوّل

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي ثانوية: المجاهد المتوفي علال العيشاوي

الشعبة: علوم تجريبية دورة : **2025**

تصحيح اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3 ساعات

تصحيح الموضوع الأوّل :

التمريـــن الأول : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n \leq e^2$ 0.5 ن

نضع: $P(n) : 0 \leq u_n \leq e^2,\ n \in \mathbb{N}$

- بداية التراجع: من أجل $n = 0$، لدينا: $u_0 = 1$ و $0 \leq 1 \leq e^2$ ومنه: $0 \leq u_0 \leq e^2$ اذن: $P(0)$ صحيحة.
- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

لدينا: $0 \leq u_n \leq e^2$ ومنه: $0 \leq \sqrt{u_n} \leq e$ إذن : $0 \leq e\sqrt{u_n} \leq e^2$ ومنه: $\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq e^2}$

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $0 \leq u_n \leq e^2$ من أجل كل عدد طبيعي

2. تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتاج أنها متقاربة

◄ تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما 0.5 ن

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n$$
$$= \boxed{\sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n})}$$

بما أن $0 \leq u_n \leq e^2$ اذن $0 \leq \sqrt{u_n} \leq e$ و $-e \leq -\sqrt{u_n} \leq 0$ ومنه: $0 \leq e - \sqrt{u_n} \leq e$ اذن: $\sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) > 0$

ومنه: $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$ اذن : (u_n) متزايدة تماما.

◄ استنتاج تقارب المتتالية (u_n) 0.25 ن

بما أن (u_n) محدودة من لأعلى ومتزايدة تماما إذن (u_n) متقاربة

3. نضع: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \ln u_n - 2$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول 1 ن

لدينا:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$$
$$= \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2$$
$$= -1 + \frac{1}{2}\ln u_n = \frac{1}{2}(\ln u_n - 2) \quad \boxed{= \frac{1}{2}v_n}$$

اذن: (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ حدها الأول: $\boxed{v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(1) - 2 = 0 - 2 = -2}$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 0.25 ن

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ اذن: $v_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ج) كتابة عبارة u_n بدلالة n، ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

◄ كتابة عبارة u_n بدلالة n 0.5 ن

لدينا: $v_n = \ln u_n - 2$ اذن: $\ln u_n = v_n + 2$ ومنه: $u_n = e^{v_n+2}$ اذن: $u_n = e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2}$

◄ حساب $\lim u_n$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2} = e^{0+2} = e^2$ (لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ لان: $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$) 0.5 ن

د) كتابة P_n بدلالة n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$ 0.5 ن

لدينا: $u_n = e^{v_n+2}$ اذن:

$$P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$$
$$= e^{v_0+2} \times e^{v_1+2} \times ... \times e^{v_n+2} = e^{v_0+v_1+...+v_n+2(n+1)}$$

لدينا: $v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = -2 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -4\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

اذن: $P_n = e^{-4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+2(n+1)}$

التمريـــن الثاني : (4 نقاط)

✍ مؤسسة ناشئة بها 12 موظف منهم 7 رجال أحدهم اسمه أنس و 5 نساء احداهن هبة، نريد تكوين لجنة من 3 أعضاء تمثل عمال المصنع.

1. ✍ عدد الحالات الممكنة لاختيار 3 أعضاء من العمال: 0.25 ن

لدينا: $C_{12}^3 = \dfrac{12!}{3!(12-3)!} = \dfrac{12!}{3!9!} = 220$ ومنه: عدد الحالات الممكنة لاختيار 3 أعضاء من العمال هي 220 حالة

2. ✍ حساب احتمال الحوادث التالية:

❖ A " اللجنة كلها رجال " ❖ B " اللجنة تضم رجلا وامراتين " ❖ C " اللجنة تضم أنس و هبة "

◄ حساب احتمال الحدث A: $P(A)$ 0.25 ن

لدينا: $P(A) = \dfrac{C_7^3}{C_{12}^3} = \dfrac{35}{220} = \dfrac{7}{44}$

◄ حساب احتمال الحدث B: $P(B)$ 0.25 ن

لدينا: $P(B) = \dfrac{C_7^1 \times C_5^2}{C_{12}^3} = \dfrac{7 \times 10}{220} = \dfrac{70}{220} = \dfrac{7}{22}$

◄ حساب احتمال الحدث C: $P(C)$ 0.25 ن

لدينا: $P(C) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_{10}^1}{C_{12}^3} = \dfrac{1 \times 1 \times 10}{220} = \dfrac{10}{220} = \dfrac{1}{22}$

3. ✍ نعرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد النساء في اللجنة

أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

قيم المتغير العشوائي X هي: $\{0;1;2;3\}$

ب) تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم حساب أمله الرياضياتي $E(X)$

◄ تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X $\boxed{1 \text{ ن}}$

❖ $P(X=0)$ هو احتمال للجنة كلها رجال أي $P(A)$:

$$P(X=0)=P(A)=\frac{35}{220}=\frac{7}{44}$$

❖ $P(X=1)$ هو احتمال اللجنة تضم امراة و رجلين :

$$P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{5\times 21}{220}=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}$$

❖ $P(X=2)$ هو احتمال اللجنة تضم رجلا وامراتين أي $P(B)$:

$$P(X=2)=P(B)=\frac{70}{220}=\frac{7}{22}$$

❖ $P(X=3)$ هو احتمال للجنة كلها نساء :

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$$

عندئذ:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{220}$	$\frac{105}{220}$	$\frac{70}{220}$	$\frac{10}{220}$

◄ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

لدينا:

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i=0}^{i=3}x_i\times p_i\\&=0\times\frac{35}{220}+1\times\frac{105}{220}+2\times\frac{70}{220}+3\times\frac{10}{220}\\&=\frac{0+105+140+30}{220}\\&=\frac{275}{220}=1.25\end{aligned}$$

ج) حساب $P(X>1)$ $\boxed{0.5 \text{ ن}}$

لدينا:

$$\begin{aligned}P(X>1)&=P(X=2)+P(X=3)\\&=\frac{70}{220}+\frac{10}{220}\\&=\frac{80}{220}=\frac{4}{11}\end{aligned}$$

4) نريد تعيين مدير للمؤسسة ونائب من العمال

أ) حساب احتمال أن يكون المدير و نائبه من جنسين مختلفين. 0.5 ن

❖ نسمي الحدث D: " اللجنة من جنسين مختلفين " : $P(D) = \frac{2 \times A_5^1 \times A_7^1}{A_{12}^2} = \frac{2 \times 5 \times 7}{132} = \frac{70}{132} = \frac{35}{66}$

ب) حساب احتمال أن يكون أنس أحد العضوين. 0.5 ن

❖ نسمي الحدث E: " أنس أحد العضوين. " : $P(E) = \frac{2 \times A_1^1 \times A_{11}^1}{A_{12}^2} = \frac{22}{132} = \frac{1}{6}$

التمريـــن الثالث : (5 نقاط)

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الاتية: $z^2 + 4z + 8 = 0$ 1 ن

لدينا: $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16$، بما أن $\Delta < 0$ اذن للمعادلة حلين مركبين وهما:

$z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$ و $z_2 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i$

II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = -2+2i$، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -z_B$

1. ✍ كتابة العدد z_A على الشكل الاسي ثم استنتاج الشكل الاسي لكل من z_B و z_C

◄ كتابة العدد z_A على الشكل الاسي 0.5 ن

لدينا: $|z_1| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ اذن: $\theta =$

$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ مع: $k \in \mathbb{Z}$ ومنه: $z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$

◄ استنتاج الشكل الاسي لكل من z_B و z_C 2×0.25 ن

لدينا: $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi i}{4}}$ و $z_C = -z_B = e^{\pi i}2\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi i}{4}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$

2. أ) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(z_A)^n$ حقيقي موجب 0.5 ن

حتى يكون العدد $(z_A)^n$ حقيقي موجب يكفي أن يكون: $arg(z_A^n) = 2k\pi$ أي: $narg(z_A) = 2k\pi$

ومنه: $n\frac{3\pi}{4} = 2k\pi$ اذن: $n = \frac{8}{3}k$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

ب) تبيان أن العدد $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف 0.5 ن

لدينا: $z_C = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ ومنه: $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1962} = e^{\frac{\pi i}{4} \times 1962} = e^{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i} = i$ ومنه: العدد $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف

3. ✍ كتابة العدد المركب $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الاسي ثم استنتاج طبيعة المثلث ABC

◄ كتابة العدد المركب $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الاسي **0.5 ن**

لدينا:

$$L=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-2-2i+2-2i}{2+2i+2-2i}=\frac{-4i}{4}=-i$$

اذن: $|L|=1$ و $arg(L)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$ ومنه ينتج: $L=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

◄ استنتاج طبيعة المثلث ABC: **0.25 ن**

لدينا: $|L|=1$ اذن: $\dfrac{AB}{AC}=1$ اذن: $AB=AC$

ولدينا من جهة أخرى: $arg(L)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ أي: $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الساقين

4. ✍ (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $arg\left(\dfrac{z+2-2i}{z+2+2i}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

أ) تبيان أن النقطة O تنتمي إلى (Γ) **0.5 ن**

لدينا:

$$\frac{z_O+2-2i}{z_O+2+2i}=\frac{2-2i}{2+2i}=\frac{(2-2i)^2}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{-8i}{8}=-i$$

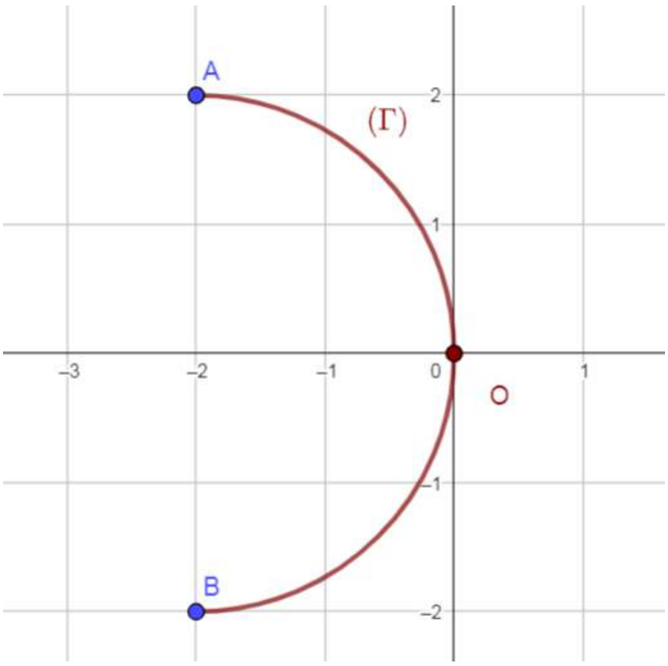
ومنه: $arg\left(\dfrac{z_O+2-2i}{z_O+2+2i}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ اذن: النقطة O تنتمي إلى (Γ)

ب) تعيين ثم إنشاء (Γ)

◄ تعيين (Γ): **0.5 ن**

لدينا: $arg\left(\dfrac{z+2-2i}{z+2+2i}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ ومنه: $arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ أي: $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=-\dfrac{\pi}{2}$ ومنه (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

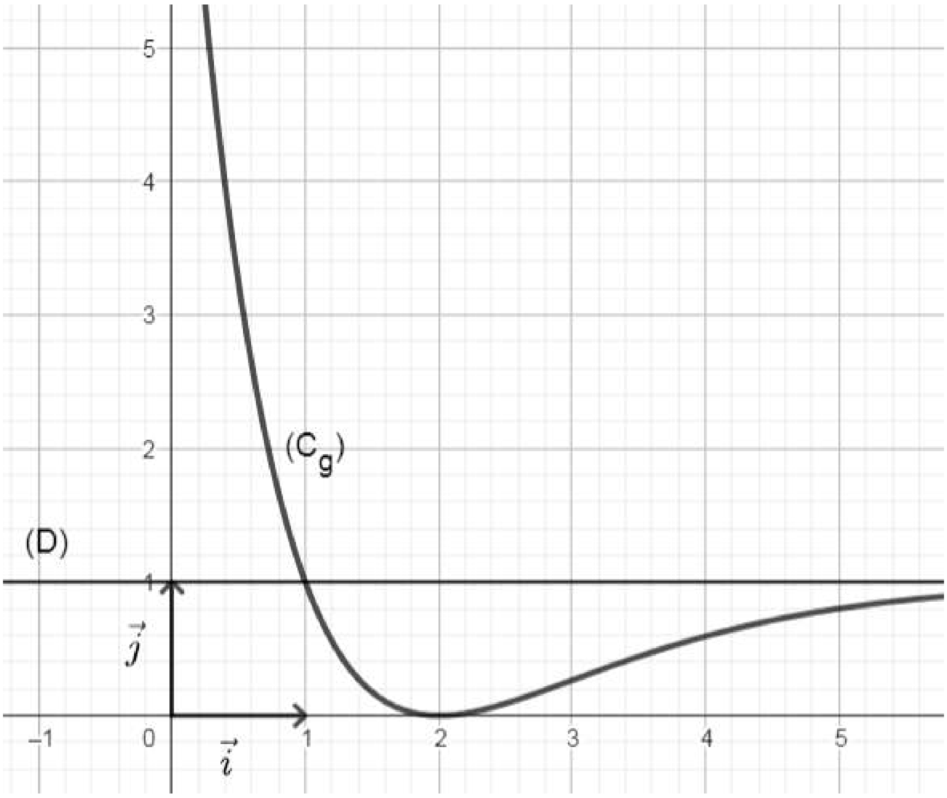
◄ إنشاء (Γ) : **0.25 ن**



التمريــن الرابع : (7 نقاط)

I) (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = c + (a + bx)e^{-x+2}$.

◄ بقراءة بيانية :



1. تعيين $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ ثم إستنتاج أن $c = 1$.

◄ تعيين $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ 0.25 ن

من الشكل نلاحظ: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

◄ إستنتاج أن $c = 1$ 0.25 ن

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} c + (a + bx)e^{-x+2} = c$ اذن من خلال مما سبق: $c = 1$

2. تعيين $g(2)$ و $\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ ثم إستنتاج أن $a = 1$ و $b = -1$.

◄ تعيين $g(2)$ 0.25 ن

من الشكل نلاحظ: $g(2) = 0$

◄ تعيين $\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ 0.25 ن

لدينا من جهة : $\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$ ومن جهة أخرى: $g(2)$ قيمة حدية صغرى اذن: $g'(2) = 0$

ومنه نستنتج أن: $\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 0$

◄ إستنتاج أن $a = 1$ و $b = -1$ 2×0.25 ن

لدينا: $g(2)=0$ أي: $1+(a+2b)=0$ ومنه: $a+2b=-1$

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x)=(b-a-bx)e^{-x+2}$، بما أن $g'(2)=0$ اذن: $-b-a=0$

ومنه: $a=-b$، اذن: $-b+2b=-1$ اي: $b=-1$ ومنه: $a=1$

.3 إستنتج من أجل كل عدد حقيقي x: إشارة $g(x)$. 0.5 ن

من خلال الشكل نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g(x)\geq 0$، نلخص ذلك في جدول الإشارة:

x	0		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+xe^{-x+2}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

.1 حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

◄ حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 0.25 ن

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x-1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x+2}=-\infty$

◄ حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 0.25 ن

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x+2}=0$ (نهاية شهيرة)

.2 أ) تبيان أن f دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ 0.25 ن

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1+e^{-x+2}-xe^{-x+2} \\ &= 1+(1-x)e^{-x+2}=g(x) \end{aligned}$$

ومنه: f دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

ب) إستنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

◄ إستنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f 0.25 ن

بما أن: $f'(x)=g(x)$ و $g(x)\geq 0$ اذن: $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة على $\mathbb{R}$

◄ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f 0.25 ن

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3. حساب : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ ، ثمّ تفسّير النتيجة بيانيا.

◄ حساب : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x+2} = 0$

◄ تفسّير النتيجة بيانيا $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

بماأن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$ فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلتة: $y = x-1$ بجوار $+\infty$

4. دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

لدينا: $f(x) - y = xe^{-x+2}$

$f(x) - y = 0$ يعني أن: $xe^{-x+2} = 0$ ومنه: $x = 0$ (لأن: $e^{-x+2} > 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)-y	$-$	0	$+$
الوضع النسبي بين (C_f) و(Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع(Δ)في النقطة (0,-1)	(C_f) فوق (Δ)

5. أ) تبيان أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

◄ تبيان أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

نحل المعادلة : $f'(x) = 1$ أي: $g(x) = 1$ ومنه: $1 + (1-x)e^{-x+2} = 1$ أي $(1-x)e^{-x+2} = 0$ ومنه:

$1 - x = 0$ (لأن: $e^{-x+2} > 0$) اذن $x = 1$

ومنه: النقطة هي : $(1; f(1))$ حيث: $\boxed{f(1) = 1 - 1 + e^{-1+2} = e}$

◄ كتابة معادلة المماس T $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

لدينا: $f'(1) = 1$ و $f(1) = e$

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T) : y = 1(x-1) + e$$

$$(T) : y = x - 1 + e$$

ب) تبيان أنّ $I(2;3)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f). $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

لدينا:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

بما أن المشتقة الأولى انعدمت عند 2 ولم تغير اشارتها اذن النقطة $(2;f(2))$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f)،
اذن: $I(2;3)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f)

ج) تبيان أنّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α، حيث : $0 < \alpha < 0,2$ 0.25 ن

f دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;0.2[$، ولدينا:

$$f(0) = 0 - 1 + 0e^{-0+2} = -1$$

$$f(0.2) = 0.2 - 1 + 0.2e^{-0.2+2} = 0.41$$

بماأن $f(0) \times f(0.2) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 0,2$.

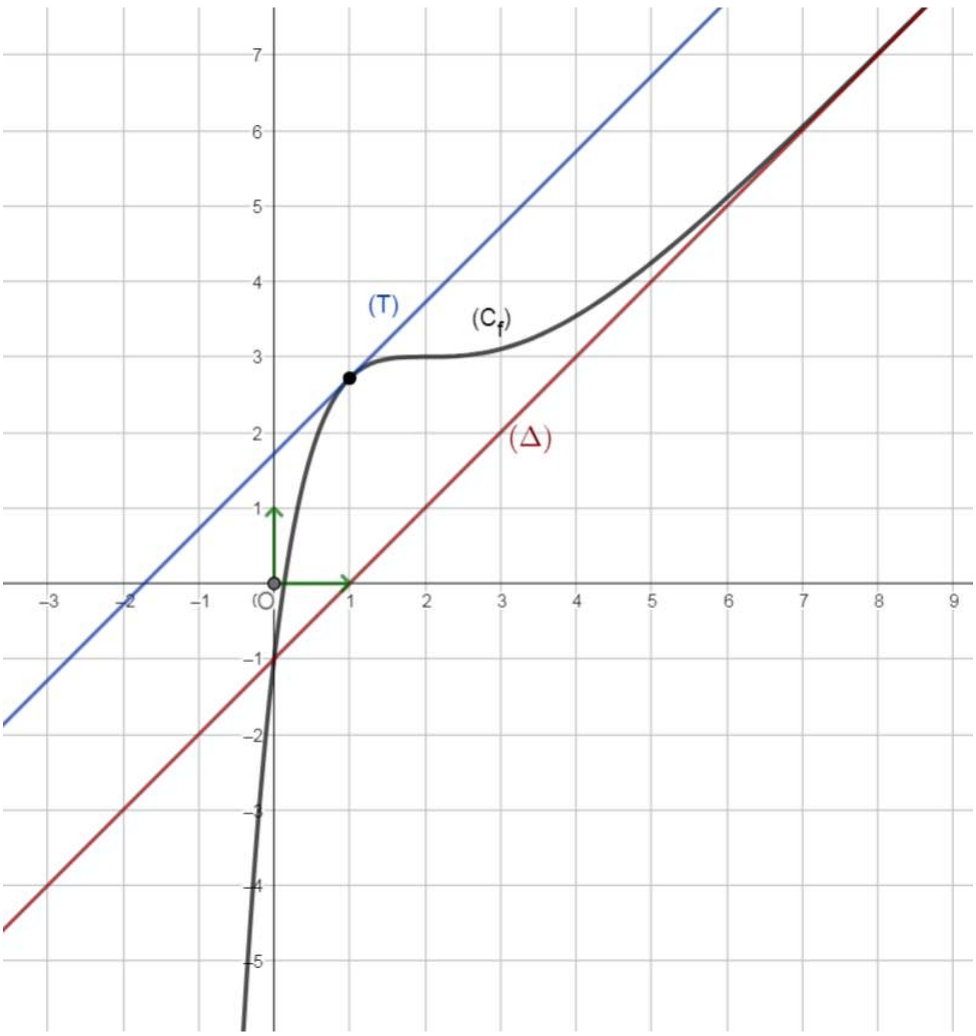
د) حساب $f(-\frac{1}{2})$ ثمّ إنشاء كلاً من (T)، (Δ) و المنحني (C_f).

◄ حساب $f(-\frac{1}{2})$ 0.25 ن

لدينا:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{-1}{2}+2} \simeq -7.59$$

◄ إنشاء كلاً من (T)، (Δ) و المنحني (C_f) 0.75 ن



6. ✍ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x+e^{x-2}(-1-m)=0$ $\boxed{0.5 \text{ ن}}$

لدينا: $x+e^{x-2}(-1-m)=0$ تعني: $x-e^{x-2}=me^{x-2}$ ومنه: $m=-1+xe^{-x+2}$

اذن: $m+x=x-1+xe^{-x+2}$ ومنه: $f(x)=x+m$ (مناقشة مائلة):

❖ $m<-1$: المعادلة تقبل حل واحد سالب

❖ $m=-1$: المعادلة تقبل حل واحد معدوم

❖ $-1\leq m\leq e-1$: المعادلة تقبل حلين موجبين تماما

❖ $m=e-1$: المعادلة تقبل حل واحد موجب وهو $x=1$

❖ $m>e-1$: المعادلة لاتقبل حلول

7. أ) تعيين الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم عند 1 بإستعمال المكاملة بالتجزئة $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

$$\begin{aligned}\int_1^x te^{-t}\,dt &= [-te^{-t}]_1^x-\int_1^x -e^{-t}\,dt\\ &= -xe^{-x}+e^{-1}-[e^{-t}]_1^x\\ &= -xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}\\ &= -(x+1)e^{-x}+2e^{-1}\end{aligned}$$

ب) حساب بالسنتيمتر مربع $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات: $y=x-1$, $x=1$ و $x=2$ $\boxed{0.25 \text{ ن}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 \Big(f(x)-(x-1)\Big)\,dx\\ &= \int_1^2 xe^{-x+2}\,dx\\ &= \Big[-(x+1)e^{-x+2}+2e\Big]_1^2\\ &= (-3+2e)-(-2e+2e)\\ &= 2e-3\ \ cm^2\end{aligned}$$

◄ ملاحظة: تقبل كل الأجوبة الصحيحة.

انتهى تصحيح الموضوع الأوّل